

Varianta 76

Subiectul I

- a) $S_{ABC} = 1$.
- b) Coordonatele punctului A verifică ecuația dreptei.
- c) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$.
- d) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 = -1$.
- e) $2 \sin 45^\circ - 6 \cos 45^\circ = -2\sqrt{2}$.
- f) $\cos(2\pi + x) = 0,3$.

Subiectul II

1.

- a) $C_4^3 = 4$.
- b) $x = \frac{7}{6}$.
- c) $P\left(\frac{1}{7}, 0\right)$.
- d) Suma coeficienților unui polinom este 4.
- e) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.

- a) $f(0) = 15$.
- b) $f'(x) = 2x^2 + 6, \quad x \in \mathbf{R}$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 6$.
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$.
- e) $\int_{-1}^1 f(x) dx = -\frac{88}{3}$.

Subiectul III

- a) Pentru $a = 0 \in \mathbf{R} \Rightarrow X(0) = I_2 \in G$.
- b) $A^2 = 2A$.
- c) $X(a) \cdot X(b) = (2ab + a + b)A + I_2 = X(2ab + a + b)$.

d) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0.$

e) $X(a) \cdot X\left(-\frac{1}{2}\right) = X\left(2a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + a - \frac{1}{2}\right) = X\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \forall a \in \mathbf{R}.$

f) $X(a) \cdot X(2007) = X(0) \Leftrightarrow X(2a \cdot 2007 + a + 2007) = X(0) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 4015a + 2007 = 0 \Rightarrow a = -\frac{2007}{4015}.$

g) Din faptul că $X(a) \cdot X(b) = X(2ab + a + b) = X(2ba + b + a) = X(b) \cdot X(a)$ și faptul că înmulțirea matricelor este asociativă, folosind e) avem că

$$X\left(-\frac{100}{2}\right) \cdot X\left(-\frac{99}{2}\right) \cdot \dots \cdot X\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot X\left(\frac{99}{2}\right) \cdot X\left(\frac{100}{2}\right) = X(t) \Rightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

Subiectul IV

a) $f(1) = \frac{3}{4}.$

b) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = f(x), \quad \forall x \in (0, \infty).$

c) $f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{(x+1)^3}, \quad \forall x \in (0, \infty).$

d) Fie $P(n)$ propoziția $a_n = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Pentru $n=1$ avem $a_1 = \frac{1^2 + 2 \cdot 1}{(1+1)^2} = \frac{3}{4}$, pe de altă parte $a_1 = f(1) = \frac{3}{4}$ deci $P(1)$ este adevărată.

Presupunem adevărată propoziția pentru $n=k, P(k): a_k = \frac{k^2 + 2k}{(k+1)^2}, k \in \mathbf{N}^*$

Vom arăta că $P(k) \Rightarrow P(k+1).$

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= f(1) + f(2) + \dots + f(k+1) = a_k + f(k+1) = \\ &= \frac{k^2 + 2k}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k+2)^2} = \frac{(k+1)^2 + 2(k+1)}{(k+2)^2}. \end{aligned}$$

Deci în baza inducție matematice avem că $a_n = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} = 1.$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(1 - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = 1.$

g) $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \int_1^2 (x^{-2} - (x+1)^{-2}) dx = \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{3}.$